AS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS NA AULA EXPLORATÓRIA COMO VERTENTE DA PRÁTICA PROFISSIONAL DO PROFESSOR[1]

MATHEMATICAL DISCUSSIONS IN THE EXPLORATORY CLASS AS A FEATURE OF TEACHER'S PROFESSIONAL PRACTICE

João Pedro Mendes da Ponte[2]
Marisa Alexandra Ferreira Quaresma[3]

RESUMO: Neste artigo analisamos a diversidade de ações que o professor empreende nos momentos de discussão coletiva. A metodologia de investigação é qualitativa e interpretativa com observação participante e gravação vídeo de uma aula de uma professora do 6.º ano. Os resultados mostram momentos produtivos de trabalho que decorrem da abordagem exploratória seguida nesta aula, em que aos alunos não tinham uma forma imediata de resolver a tarefa apresentada, tendo de recorrer a conhecimentos anteriores. Destaca-se a forma de comunicação seguida pela professora, marcada pelo incentivo à participação dos alunos, num registo dialógico, colocando-lhes questões, valorizando as suas contribuições, redizendo as suas intervenções para ajudá-los a evoluir na sua linguagem matemática e estabelecendo, quando necessário, situações de negociação de significados. Destaca-se, também, a atenção aos processos matemáticos por parte da professora, como a representação e o raciocínio, nomeadamente promovendo o estabelecimento de generalizações através de ações de desafiar.

PALAVRAS-CHAVE: ações do professor, discussões matemáticas, tarefas, comunicação, abordagem exploratória.

ABSTRACT: In this article we examine the variety of actions that the teacher undertakes in moments of whole class discussion. The research methodology is qualitative and interpretive with participant observation and recording

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de bolsas atribuída a Marisa Quaresma (SFRH/BD/97702/2013).
[2] Agregado em Educação, Professor catedrático, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa (IE, ULisboa), Lisboa, Portugal. jpponte@ie.ulisboa.pt
[3] Mestre em Educação, Assistente convidada, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa (IE, ULisboa), Lisboa, Portugal. mq@campus.ul.pt

video of a class of a grade 6 teacher. The results show productive moments of work resulting from the exploratory approach followed in this class, in which students had no immediate way to solve the task presented, having to rely on previous knowledge. The form of communication followed by the teacher, marked by encouraging the students' participation, in a dialogic way, questioning them, valuing their contributions, revoicing their contributions to help them evolve in their mathematical language and establishing, where necessary, situations of negotiation of meanings. It also stands out the attention the teacher's attention to mathematical processes, as re representing and reasoning, in particular by promoting the establishment of generalizations through actions to challenge.

KEYWORDS: teacher's actions, mathematical discussions, tasks, communication, exploratory approach.

Introdução

Numa abordagem exploratória ou investigativa ao ensino da Matemática, os alunos assumem um papel ativo na interpretação das questões propostas e na construção das suas próprias estratégias de resolução, usando com flexibilidade diversas representações matemáticas. Não dispondo de um método imediato de resolução das questões a resolver, os alunos são chamados a mobilizar o seu conhecimento, construindo e aprofundando a sua compreensão de conceitos, representações, procedimentos e outras ideias matemáticas. São também encorajados a apresentar e justificar as suas ideias aos colegas, desenvolvendo a sua capacidade de comunicação e de argumentação.

Numa aula de cunho exploratório, distinguem-se habitualmente três fases (PONTE, 2005): (i) apresentação e interpretação coletiva da tarefa; (ii) realização da tarefa pelos alunos em pares ou em grupos; e (iii) apresentação e discussão coletiva das estratégias e resultados dos alunos e síntese final. O professor, em lugar de ensinar diretamente procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos e propondo exercícios para praticar, promove um trabalho de descoberta guiada, ao mesmo tempo que proporciona momentos de negociação de significados e de discussão coletiva. Neste artigo centramos a nossa atenção no momento de discussão coletiva, durante o qual os alunos são chamados a apresentar e justificar as suas resoluções e a questionar, de forma argumentada, as resoluções dos seus colegas.

Não pretendemos estabelecer um quadro normativo, indicando o que o professor "deve" ou não fazer, mas sim analisar os fenómenos que têm lugar neste momento da aula, de modo a compreender as situações que ocorrem e as alternativas a que se pode recorrer. Na verdade, numa aula deste tipo pode surgir uma grande diversidade de situações em função do nível etário dos alunos, da sua capacidade matemática, da cultura da sala de aula, dos tópicos em estudo, bem como por influência de fatores como as preocupações do professor com a avaliação dos alunos, as determinações da escola e do coletivo de docentes sobre a gestão curricular, os manuais escolares e outros recursos disponíveis, as condições físicas da sala de aula, as perspectivas que os pais têm sobre o ensino da Matemática, etc. Desse modo, não visamos estabelecer normas gerais a serem seguidas em todas as situações. O nosso propósito é essencialmente analítico, procurando contribuir para a construção de um quadro conceptual que possa ser útil a investigadores e professores na análise e na compreensão de situações de discussão conduzidas no quadro de uma abordagem exploratória. Neste artigo, especificamente, procuramos analisar a diversidade de ações que o professor é chamado a empreender nos momentos de discussão coletiva.

Ações do professor na abordagem exploratória

A abordagem exploratória é marcada pela natureza das tarefas propostas, pelas formas de organização do trabalho dos alunos e pelo tipo de comunicação que tem lugar na sala de aula. Em primeiro lugar, as tarefas são de importância fundamental pela atividade dos alunos a que podem dar origem. Na verdade, como indicam Christiansen e Walther (1986), o que os alunos aprendem na aula de Matemática resulta principalmente da atividade que eles próprios realizam e da reflexão que efetuam sobre essa mesma atividade. Por isso, é fundamental escolher tarefas apropriadas, que possam servir de base a uma atividade matemática rica e multifacetada por parte dos alunos. De acordo com Ponte (2005), é também importante que as tarefas assumam uma natureza diversificada, incluindo exercícios, problemas, investigações e explorações. Os *exercícios* são tarefas estruturadas de desafio reduzido que visam sobretudo a consolidação de conhecimentos e os *problemas* são tarefas estruturadas de desafio elevado que visam a aplicação criativa dos conhecimentos que o aluno já possui.

Pelo seu lado, as *investigações* são tarefas abertas de desafio elevado que visam tanto o desenvolvimento de novos conceitos como o uso criativo de conceitos já conhecidos e as *explorações* são tarefas abertas de desafio reduzido que visam, sobretudo a construção de novos conceitos. Ao professor cabe selecionar as tarefas de acordo com os objetivos definidos para cada aula, tendo em atenção a sua adequação aos alunos a que se destinam.

Em segundo lugar, na realização dessas tarefas na sala de aula podem-se usar diferentes modos de trabalho. Uma possibilidade é o modo *coletivo*, com o professor a interagir com todos os alunos e estes a interagirem igualmente entre si. Outras possibilidades são o trabalho em *grupo* e aos *pares*, tendo em vista proporcionar aos alunos a possibilidade de trocarem impressões uns com os outros, ajudando-se mutuamente. Deste modo, os alunos podem participar em dois níveis do discurso da aula – o coletivo e o privado, que desenvolvem com os seus colegas. Pode-se também usar o trabalho *individual*, favorecendo o desenvolvimento da capacidade de concentração e reflexão do aluno.

Finalmente, em terceiro lugar, a comunicação em sala de aula marca de modo decisivo as oportunidades de aprendizagem dos alunos (BISHOP; GOFFREE, 1986; FRANKE; KAZEMI; BATTEY, 2007). Esta comunicação pode ser *unívoca*, quando é dominada pelo professor, ou *dialógica*, quando a contribuição dos alunos é fortemente valorizada (PONTE, 2005). É ao professor que cabe definir os padrões de comunicação, propor as tarefas a realizar e estabelecer os modos de trabalho na sala de aula mas deve fazê lo em permanente negociação com os alunos – o que, por vezes, não é nada fácil. Um aspeto muito importante do seu trabalho é o modo como procura ajudar de forma discreta os alunos a apropriar-se da linguagem matemática correta, usando, sobretudo processos de “redizer”, isto é, reformulando as afirmações dos alunos numa linguagem progressivamente mais correta. Além disso, o professor pode assumir em exclusivo o papel de *autoridade matemática* ou partilhá-lo com os alunos, procurando estimular a sua capacidade de raciocínio e argumentação.

Uma forma particular da comunicação são as discussões matemáticas, com diversos intervenientes, que assumem, todos eles, um papel de autoridade em relação às suas ideias. Um exemplo clássico é dado pela aula ficcionada de Lakatos (1978), onde os alunos alfa, beta e gama e o professor, num ambiente de acesa discussão, apresentam conjeturas, argumentos, contraexemplos, novas conjeturas e novos contraexemplos, provando e refutando afirmações sobre poliedros, e construindo desse modo novo conhecimento matemático. Um outro exemplo, desta vez com base em aulas reais, é dado por Lampert (1990), mostrando como alunos do 5.º ano apresentam as suas resoluções e justificam os seus raciocínios em questões envolvendo potências. São exemplos muito interessantes, mas coloca-se naturalmente a questão de saber o que é necessário para que elas possam ocorrer.

Um ponto de partida fundamental é, evidentemente, a tarefa proposta. Num exercício, o que está em causa é a seleção e aplicação de um método de resolução já conhecidos dos alunos, e usualmente será difícil que possa dar origem a uma discussão interessante. Para que isso aconteça, é vantajoso que a tarefa assuma caraterísticas desafiantes e propicie uma diversidade de estratégias por parte dos alunos que possam depois ser comparadas e avaliadas. Além disso, é necessário que os alunos tenham oportunidade de trabalhar de modo produtivo na tarefa, organizando as suas resoluções para apresentar aos colegas.

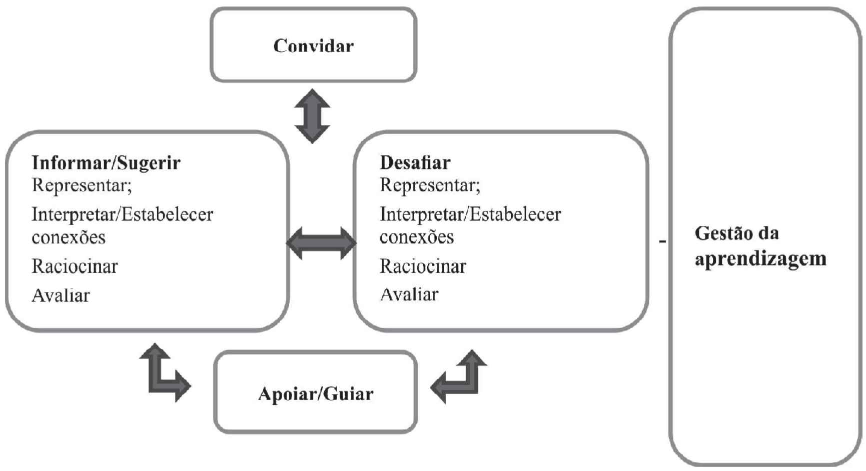
Nestas condições, cabe ao professor preparar o momento de discussão, aproveitando o melhor possível o trabalho realizado pelos alunos e o tempo de aula disponível. Para o efeito, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) propõem o que designam por “cinco práticas” que vão além do “mostrar e dizer”: (i) antecipar as possíveis dificuldades dos alunos; (ii) monitorizar o trabalho dos alunos, recolhendo a informação necessária; (iii) selecionar os aspetos a salientar durante a discussão; (iv) sequenciar as intervenções dos alunos; e, já durante a discussão, (v) estabelecer conexões entre as diversas resoluções dos alunos. Uma preparação feita nestas condições é um apoio importante à condução da discussão, mas devemos ter em atenção que esta envolve muitos aspetos para além do estabelecimento de conexões, que é impossível prever antes de esta ter início, e que o professor deve estar preparado para enfrentar. Daí a necessidade de olhar mais de perto para a dinâmica dos momentos de discussão.

Focando a sua atenção nos momentos de discussão propriamente dita, Wood (1999), num trabalho realizado numa aula do ensino primário, chama a atenção para as potencialidades da exploração de desacordos entre os alunos como pontos de partida para momentos frutuosos de discussão. Sempre que dois alunos estão em desacordo, o professor orienta que justifiquem as suas posições e encoraja os restantes alunos a associarem-se à discussão. A autora mostra como esta estratégia pode proporcionar excelentes momentos de argumentação na sala de aula. Mais recentemente, Cengiz, Kline e Grant (2011) desenvolveram um quadro de análise para as ações do professor no momento em que conduz discussões matemáticas. Propõem uma distinção entre três tipos de ações fundamentais, cujo objetivo é levar os alunos a apresentar os seus métodos (*eliciting actions*), a apoiar a sua compreensão concetual (*supporting actions*), e a alargar ou aprofundar o seu pensamento (*extending actions*). Nessa perspetiva, a aula será tanto mais conseguida, quanto mais frequentes e eficazes forem as ações deste último tipo. Pelo seu lado, Potari e Jaworski (2002), para analisar o processo de ensino-aprendizagem na sala de aula, criaram o modelo da tríade de ensino (*teaching triad*), com três elementos principais: desafio matemático, sensibilidade aos alunos e gestão da aprendizagem.

Integrando elementos destes diferentes modelos, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) desenvolveram um quadro de análise para os momentos de discussão, que distingue entre as ações do professor diretamente relacionadas com os tópicos e processos matemáticos e ações que têm a ver com a gestão da aprendizagem (Figura 1). Centrando a sua atenção nas ações relacionadas com os aspetos matemáticos, distinguem quatro tipos fundamentais:

- Convidar, ações cujo objetivo é iniciar uma discussão;
- Apoiar/guiar, ações que pretendem conduzir os alunos na resolução de uma tarefa através de perguntas ou observações e que apontam, de forma explícita ou implícita, o caminho que estes podem seguir;
- Informar/sugerir, ações em que o professor introduz informação, dá sugestões, apresenta argumentos ou valida respostas dos alunos;
- E, finalmente, desafiar, ações em que o professor procura que os alunos assumam o papel de produzir novas representações, interpretar um enunciado, estabelecer conexões, ou formular um raciocínio ou uma avaliação.

Figura 1: Quadro de análise para as ações do professor



Fonte: Ponte; Mata-Pereira; Quaresma, 2013.

Estes quatro tipos de ações podem encontrar-se em aulas de caraterísticas muito diversas, mas com frequência diferente e também num papel diferente que é interessante estudar.

Em qualquer destas ações reconhecem-se aspetos fundamentais de processos matemáticos como *representar* (tanto na mesma linguagem como mudando para outra representação), *interpretar* (redizendo por meio de palavras suas e estabelecendo conexões com outros conceitos), *raciocinar* (fazendo inferências, isto é, tirando novas conclusões, de forma fundamentada, de informação já existente) e *avaliar* (fazendo julgamentos gerais sobre aspetos relacionados com a resolução da tarefa).

Como indica Bruner (1999), as representações podem ser ativas, icónicas ou simbólicas, envolvendo linguagem oral e escrita, gestos, desenhos e diagramas e símbolos matemáticos. Sem representações é impossível trabalhar em Matemática e, em grande medida, o sucesso da resolução de um problema decorre de uma escolha apropriada das representações a usar. A interpretação (*sense making*) é essencial, para que o trabalho em Matemática faça sentido, o que requer uma compreensão tanto da natureza global da tarefa como dos seus aspetos de detalhe, em relação com outros conceitos e experiências. O raciocínio inclui fazer conjeturas e generalizações (raciocínio indutivo e abdutivo) e apresentar justificações (raciocínio dedutivo), eventualmente organizadas em cadeias de inferências (demonstrações). Finalmente, a avaliação inclui todos os aspetos de natureza global, que levam a apreciar o valor de um conceito, de uma representação ou de uma estratégia de resolução de uma tarefa.

Metodologia de investigação

De seguida, apresentamos um episódio ocorrido durante a discussão de uma tarefa que visava levar os alunos do 6.º ano (11 anos) a desenvolver a noção de operador no contexto da resolução de problemas tendo em vista analisar as ações do professor. Durante uma parte da aula os alunos trabalharam aos pares e na outra parte realizou-se a discussão coletiva. A professora que conduz a aula (a segunda autora deste artigo) tem 6 anos de experiência, e procura pôr em prática nas suas aulas uma abordagem exploratória. Participam também na aula os alunos de uma turma do 6.º ano de uma escola básica rural do ensino público, de uma zona considerada socialmente desfavorecida, a 50 km de Lisboa. Os pais dos alunos, em geral, são de classe baixa ou média-baixa com habilitações que, na sua maioria, não vão além do ensino fundamental. A turma tem 19 alunos, dos quais 4 já reprovaram em anos anteriores e cujas idades variam entre 12 e 17 anos, revela reduzido empenho e poucos hábitos de trabalho. As aulas foram registadas em vídeo, sendo as discussões coletivas integralmente transcritas. A análise dos dados começou por identificar os segmentos na discussão da resolução de cada tarefa, codificando as ações do professor de acordo com as categorias apresentadas na Figura 1. De seguida, procuramos estabelecer relações entre estas ações e eventos marcantes no que respeita às interpretações, representações e raciocínios (generalizações e justificações) realizadas pelos alunos.

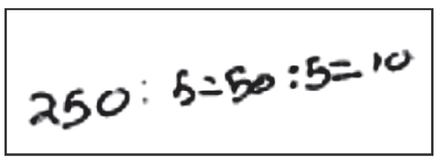
Este episódio tem por base uma tarefa que pede aos alunos que usem frações como operadores multiplicativos para determinar uma parte de um todo. É uma situação contextualizada, envolvendo uma grandeza discreta, onde a informação é dada sob a forma de números inteiros e frações. Espera-se que o resultado seja um número inteiro, pedindo-se ainda uma justificação da resposta. Trata-se de uma tarefa de natureza exploratória, pois os alunos não tinham ainda resolvido situações deste tipo na aula de Matemática, pelo que teriam de dar sentido à questão e procurar uma forma de resolvê-la.

Tarefa. Para a sua festa de aniversário, Rita comprou 250 rebuçados para dar aos seus amigos. Decidiu dar $\frac{1}{5}$ aos colegas da natação, $\frac{3}{5}$ aos colegas da escola e guardou $\frac{2}{10}$ para dar aos convidados da sua festa de aniversário. Quantos rebuçados deu Rita aos colegas da natação? Justifique a tua resposta.

Segmento 1 – Uma resposta errada como ponto de partida

Depois dos alunos terem resolvido esta tarefa aos pares, a professora inicia a discussão coletiva convidando alguns dos que tinham obtido respostas erradas a apresentarem a sua resolução. Procura, assim, criar oportunidades para o confronto de ideias e o surgimento de explicações e justificações. Daniel aceita o convite e vai ao quadro apresentar a resolução que tinha feito em conjunto com Marco, tendo mostrado diversas operações com números inteiros (figura 2).

Figura 2: Resolução inicial de Daniel.



Fonte: Figura elaborada pelos autores, 2015.

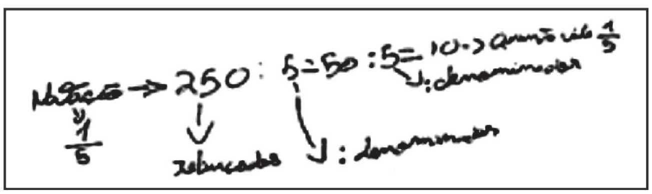
Para focar a atenção de todos os alunos, parte dos quais, entretanto, já estavam alheados da tarefa, a professora recorda novamente o enunciado e pede a Daniel que explique oralmente o seu raciocínio. O aluno afirma que “já está tudo explicado” nos cálculos registados no quadro, mostrando dificuldade em justificar de forma mais explícita a sua resposta. Para ele, os cálculos continham todas as justificações necessárias. Perante isso, a professora reforça o convite, insistindo com o aluno para que explique oralmente como resolveu a questão e encoraja-o a falar, ao mesmo tempo em que procura evitar que os colegas se intrometam:

> Professora: Não está aí explicado Daniel… Eu não percebo, eu olho para aí […]. E, preciso da tua ajuda. […] Deixem lá o Daniel explicar […] A forma como […] que ele pensou.
> Daniel: Na natação, 250 é o número dos rebuçados a

> dividir por 5 que é o denominador, para ver quanto é que valia, ao todo [...].

Daniel acaba por dizer que, para saber quantos rebuçados recebem os colegas da natação, dividiu 250 por 5. Implicitamente está a dizer que, para determinar $\frac{1}{5}$ de certa quantidade, tem de dividir por 5. O processo usado pelo aluno está correto, mas a professora considera a explicação insuficiente, pelo que lhe pede para explicitar onde intervém a fração indicada no enunciado, completando a sua resolução com essa informação. Em seguida, guia o aluno na continuação da sua explicação, ajudando-o a completar a sua representação e procurando dar elementos ou colocando questões que apoiem a interpretação da situação (figura 3).

Figura 3: Resolução de Daniel, completada pelo aluno após as sugestões da professora.



Fonte: Figura elaborada pelos autores, 2015.

> Professora: Então põe lá por baixo de natação, põe lá a fração, se faz favor, só para nós percebermos o que é que tu estás a dizer... por baixo da palavra natação, mete a fração dos rebuçados que ela deu aos meninos da natação, qual foi a fração?
> Alunos: $\frac{1}{5}$.
> Professora: Isso, OK, só para nós percebermos do que é que tu estás a falar... então quando tu dizes que dividiste por 5 é porque 5 é o denominador dessa fração $\frac{1}{5}$... Continua...
> Daniel: E deu 50.
> Professora: E o que é que representa esse 50?
> Daniel: Esse 50 significa quanto é que vale este 5 (aponta para o denominador da fração $\frac{1}{5}$)... E fiz 50 a dividir por 5 outra vez por causa do denominador para ver quanto é

> que valia este 1. Deu 10… então deu… fiz… 10 vezes o numerador e deu 10, acho que deu 10 rebuçados…

Na sua resolução, Daniel e Marco tinham usado duas vezes o operador $\frac{1}{5}$. Por isso, quando Daniel refere que obteve 50, a professora pergunta-lhe o que representa esse valor. Trata-se da questão crítica, que assume uma natureza desafiante, pois o aluno não interpretou o 50 como o número de rebuçados que são dados aos meninos da natação e calculou novamente $\frac{1}{5}$ do valor obtido. Ou seja, Daniel não interpreta a sua resposta nos termos do contexto do enunciado, e indica apenas os cálculos que efetuou para obter 50. A sua explicação é puramente "computacional" e sem qualquer ligação com o contexto do problema. Neste ponto, a professora toma uma decisão importante – em vez de corrigir o erro de Daniel, desafia outros alunos da turma a tomarem posição, procurando promover o surgimento de manifestações de desacordo, o que dá origem a um novo segmento.

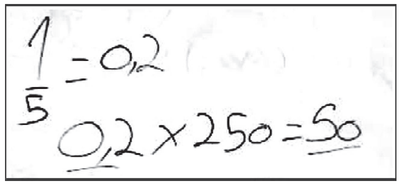
Segmento 2 – Análise de duas respostas corretas

Em resposta ao desafio da professora, surgem de imediato diversas manifestações de desacordo, sendo vários os alunos que mostram estranheza ou dizem que a resolução de Daniel está errada:

> Alunos: E deu 10 rebuçados?
> Eu acho que não…
> Eu acho que é 50 só…
> Eu também, eu acho que dá 50…
> Eu acho que também deu 50…

Um destes alunos, Jaime, pede para mostrar o seu raciocínio e a professora dá lhe a palavra. Este, em vez de apresentar argumentos para rebater o raciocínio do colega, prefere apresentar o seu próprio raciocínio que se baseia na representação decimal. Assim, transformou em numeral decimal, obtendo 0,2, e usou este valor como operador multiplicativo (Figura 4). Jaime percebe que o resultado de Daniel está incorreto porque não é igual ao seu, mas não consegue identificar (e muito menos explicar) o erro do colega.

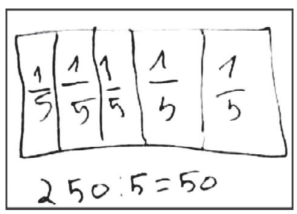
Figura 4: Resposta de Jaime



Fonte: Figura elaborada pelos autores, 2015.

Os alunos aceitam a resolução de Jaime sem oposição. Um deles, Vasco, já habituado a que na aula de Matemática sejam apresentadas resoluções diferentes, afirma que há ainda outra forma de resolver a questão. Esta oferta é, naturalmente, muito bem vinda por parte da professora, pois poderá ajudar a estabelecer conexões entre várias resoluções. O aluno apresenta então a sua resolução, que tem por base uma representação em diagrama (um retângulo dividido em "fatias") que, daí em diante, passa a servir de referência na discussão (Figura 5).

Figura 5: Resposta de Vasco.



Fonte: Figura elaborada pelos autores, 2015.

Vasco explica que cada parte da figura representa $\frac{1}{5}$ e que, para saber o valor de cada "fatia", dividiu 250 por 5, obtendo como resultado 50 rebuçados que seriam para os colegas da natação. Deste modo, é feita a conexão entre as representações $250 \times \frac{1}{5}$ (uma nova operação para os alunos, envolvendo um número natural e uma fração), a representação 250 : 5 (uma operação já conhecida, envolvendo números naturais, expressa em linguagem simbólica) bem como com uma representação em diagrama do processo de dividir um todo em cinco partes iguais.

Desta forma, o modo como a professora encorajou Daniel a apresentar o seu raciocínio criou condições para o surgimento de expressões de desacordo por parte de diversos alunos e para a oferta espontânea de Jaime e depois também de Vasco para apresentarem a sua resolução. Este último aluno, introduz uma nova representação, em diagrama, que ajuda os alunos da turma a ver que é a quinta parte da unidade, ou seja, a unidade dividida em cinco partes iguais. Note-se, porém, que esta explicação feita por Vasco, não é compreendida de imediato por todos os alunos e, por isso, a professora volta a retomá-la nos segmentos seguintes.

Segmento 3 – Comparação de uma resposta correta e outra incorreta

Considerando que a questão ainda não está completamente esclarecida a professora retoma então o desacordo entre a resolução de Daniel e dos outros alunos. Assumindo que a resolução de Vasco é a mais facilmente compreensível, foca-se na comparação entre esta resolução e a de Daniel:

> Professora: Mantém-se o nosso problema… Quantos rebuçados demos aos colegas da natação? 10 ou 50?

Guilherme responde de imediato 50, mas a professora fica sem saber o que pensa a maioria dos alunos da turma. Decide então fazer um rápido levantamento dos alunos que apoiam uma ou outra resolução:

> Guilherme: 50.
> Professora: 50, porquê? Então vocês acham… Quem é que acha que é 50, mete o dedo no ar. Ah, muito bem, então… Acham que é 50. E não acham que é 10… Então porque é que não é 10?

Verificando ser elevado o número de alunos que defendem a resolução de Vasco, a professora desafia-os a apresentarem argumentos contra a resolução de Daniel. Um dos alunos diz “porque essa está mal”, argumento que a professora não aceita como válido, pedindo uma justificação mais completa:

> Professora: Calma… Porque sim, não é resposta. Vamos lá tentar… Jaime porque é que tu achas que não é 10? E não aceito como resposta, “porque acho que é 50”. OK, essa parte eu já percebi. Agora quero que me tentes

> explicar porque é que (…) aquela resolução não está correta.

Perante este desafio, Jaime avança então com uma explicação tendo por base o diagrama apresentado por Vasco:

> Jaime: Não sei da minha, mas sei da do Vasco. Aquilo tudo vale… […]
> Guilherme: 250.
> Jaime: Vale 250 rebuçados e cada parcela daquilo vale $\frac{1}{5}$. E aquilo depois é… Aquilo está só a pedir $\frac{1}{5}$ e a gente, vamos ver, ou seja, em número decimal quanto é que vale cada parcela daquelas e ela só pede $\frac{1}{5}$ para cada […] por isso, aquilo tudo ali vale 50.
> Guilherme: É só uma parcela.

Deste modo, Guilherme ajuda Jaime na sua explicação e corrobora os argumentos de Jaime e Vasco.

A professora lança então um novo desafio, procurando que os alunos indiquem as diferenças entre as duas resoluções:

> Professora: Então porque é que… Então o que é que aconteceu aqui? O que é que aconteceu aqui Daniel (aponta para a resolução deste aluno), qual é que é a semelhança e qual é que é a diferença (entre as resoluções de Daniel e de Vasco)… Onde é que aconteceu aqui a diferença entre esta resolução e aquela resolução? Há ali uma diferença…
> Daniel: É dividir o 50 por 5.

Daniel reconhece então que a diferença está na divisão de 50 por 5 que os seus colegas não fizeram, o que leva a professora a procurar saber por que razão fez essa operação:

> Professora: Porquê? Porque é que dividiste o 50 por 5?
> Daniel: Pensava que… Para ver quanto é que valia os 5.
> Professora: Mas aqui, quando aqui chegaste o que é que

> significa dividir por 5, o que é que significa este dividir por 5? Quando tu dividiste isto por 5 aqui estavas no fundo a encontrar o quê?
> Aluno: O 50.
> Guilherme: $\frac{1}{5}$.

A professora desafia Daniel a dar uma justificação para ter dividido 50 por 5. Contudo, mais uma vez, o aluno responde apenas com o resultado da operação e não consegue atribuir significado à sua própria resolução e, por consequência, ao resultado obtido no contexto do problema. Por fim, é de novo Guilherme, que intervém, indicando que se procurava determinar $\frac{1}{5}$, o que equivale a dividir por 5. Daniel não se manifesta – não se sabe se terá sido vencido ou convencido. É algo que a professora procurará saber numa próxima oportunidade.

Para finalizar esta discussão a professora promove ainda uma negociação de significado da expressão $\frac{1}{5}$ relacionando-a com a "quinta parte" e voltando a fazer referência à representação em diagrama de Jaime.

> Professora: $\frac{1}{5}$. Digam lá outra forma de dizer $\frac{1}{5}$… Como é que vocês no 1.º ciclo diziam $\frac{1}{5}$ … Antigamente vocês não lhe chamavam $\frac{1}{5}$ … Como é que vocês antigamente diziam a metade? Oh! … Já disse já disse… Como é que vocês diziam ? Chamavam-lhe metade. Como é que vocês diziam no 1.º ciclo?
> Guilherme: Terça parte.
> Professora: A terça parte, OK. Então aqui quando vocês dividem por 5 o que é que vocês estão a fazer?
> Edgar: A quinta parte…
> Professora: Estão a determinar quanto é que é a quinta parte de…
> Aluno: 250.
> Professora: 250, e, perceberam… Que este todo são os e se nós dividirmos os , ou seja, o todo em 5 partes iguais encontramos … a…
> Juliana: … A quinta parte.
> Professora: Ah! Descubro a sua quinta parte! Muito bem… Então eu fiz… 5 caixinhas e distribuí da mesma forma, os 250 rebuçados pelas 5 caixinhas… Sim?

Neste segmento é importante destacar a exploração do desacordo entre as resoluções feita pela professora. Esta desafia os alunos a compararem as resoluções apresentadas e a encontrar o erro cometido por Daniel, o que é feito com o contributo de diversos alunos. Finalmente, a professora aproveita para promover uma negociação do significado do que é a "quinta parte".

Segmento 4 – Generalização: como multiplicar uma fração por um número natural

Depois de ter sido discutido o erro de Daniel e clarificado que determinar a quinta parte corresponde a dividir uma quantidade por 5, a professora desafia os alunos a fazerem uma generalização:

> Professora: Que é a mesma coisa, é a mesma coisa… Muito bem. É a relação é poder fazer assim… Então vamos tentar chegar a uma conclusão mais geral, diz-me lá…
> Rui: Sempre que quisermos fazer uma conta dessas …
> Professora: Sim.
> Rui: É só dividir o denominador pela coisa que estiver antes […] que neste caso são os rebuçados.
> Professora: Como é que é, explica lá… Dá lá mais exemplos…
> Rui: Por exemplo, , se for outro exemplo, quantos rebuçados? 150 por exemplo… Sempre que há contas dessas, eu posso fazer o 4 ou o denominador a dividir pelo número. E vai dar o resultado.

Tal como os colegas, também Rui apresenta dificuldade de comunicação trocando o nome dos termos da fração e da divisão. Contudo, compreende-se que pretende dizer que, numa situação em que uma fração unitária tem o significado operador, basta dividir o cardinal do conjunto dado pelo denominador dessa fração

Perante a generalização feita por Rui, ainda que numa linguagem pouco correta, a professora decide desafiá-lo a aplicar a sua generalização a frações não unitárias: "Então agora, vou fazer-te uma pergunta… Isso aplica-se se eu tiver ?" Rui tenta encontrar uma relação, mas não consegue e acaba por desistir. Então Guilherme pede para intervir e acaba por alargar a generalização de Rui à multiplicação de um número natural por uma fração não unitária:

> Guilherme: Posso professora?
> Professora: Podes. Guilherme diz-me lá… Achas que está bem, ou achas que está mal e porquê… Qual é que é aquele resultado que tu achas que…
> Guilherme: Eu acho que… Pode-se fazer da mesma maneira só que tem que se acrescentar uma coisa…
> Professora: Temos de acompanhar… Oh Rui, aquela é a tua… Ele está a dizer que é mentira, tu tens que a defender… Olha Guilherme, continua lá a explicar então.

A professora começa por guiar a explicação de Guilherme pedindo-lhe que se pronuncie sobre o que já havia sido apresentado pelo colega. Como Rui parece ter desistido da discussão com Guilherme, a professora convida-o a ouvir os argumentos deste último tentando que se mantenha envolvido no diálogo e na elaboração de argumentos que o levem a ultrapassar a sua dificuldade na compreensão da multiplicação de um número natural por uma fração não unitária.

Apesar de mostrar compreender a situação em causa, também Guilherme mostra dificuldade na utilização da linguagem matemática, pelo que, a professora decide apoiar a sua explicação redizendo as suas afirmações de modo matematicamente mais correto:

> Guilherme: Pode-se fazer 150 a dividir por 4… […]
> Guilherme: Podemos fazer da mesma maneira porque podemos fazer… 4 a dividir por 150 dá 37,50.
> Professora: Vá 150 a dividir por 4, vá, tomem lá atenção…
> Guilherme: 150 a dividir por 4, depois fazemos o resultado vezes o denominador.
> Professora: O de cima ou o de baixo?
> Guilherme: O de cima…
> Professora: Ah, o numerador.
> Guilherme: Numerador…
> Professora: Ok, vamos então, vamos ver, vamos avançar… então faríamos… o que é que significa fazer… quanto é que dá 150 a dividir por 4. Primeiro eu tenho que saber o que é que significa 150 a dividir por 4… o que é que é este 37,5.
> Guilherme: É de 150.
> Professora: É de 150, OK. Então... Eu aqui quero… Quantos quartos?

Guilherme: 2 quartos! Por isso é que vamos fazer vezes 2.

Deste modo, com a ajuda da professora, Guilherme consegue reformular corretamente a generalização de Rui e responder ao desafio colocado pela professora.

Neste segmento, a professora desafia os alunos a fazerem uma generalização sobre o que poderá ser a multiplicação de uma fração qualquer por um número natural. Nesta turma, os alunos raramente tomam iniciativa de fazerem generalizações, mas quando questionados nesse sentido mostram conseguir fazê-lo. Destaca-se ainda o sucessivo questionamento da professora que leva os alunos a melhorarem as suas explicações bem como o cuidado em redizer as afirmações dos alunos para que estes possam aperfeiçoar a sua linguagem matemática.

Conclusão

Neste artigo, vemos uma professora de Matemática conduzindo uma discussão coletiva relativamente a uma tarefa de natureza exploratória. A professora inicia a discussão com uma análise de uma resposta errada de um aluno, que tinha previamente identificado como tendo um ponto de partida promissor para a discussão. Em seguida, aceita o pedido de outros alunos para apresentarem as suas respostas, sendo analisadas duas respostas baseadas em diferentes representações – numeral decimal e diagrama. Num terceiro momento, a professora promove a comparação detalhada entre a resolução (correta) baseada no diagrama e a representação (incorreta) inicial. Finalmente, procura levar os alunos a formular verbalmente a generalização que constituiu o objetivo da aula, respeitante à multiplicação de uma fração por um número natural.

No decurso da condução da discussão coletiva, a professora realiza diversas ações decisivas. No primeiro segmento, a maioria das suas ações vai ao sentido de apoiar/guiar um aluno, Daniel, a apresentar a sua resolução. Neste segmento a professora tem duas ações fundamentais de natureza desafiante – a primeira quando pergunta ao aluno o que significa o 50 que ele obteve nos seus cálculos e a segunda quando desafia os restantes alunos a tomarem posição perante a resolução do colega. O ponto-chave está na interpretação do significado dos cálculos e do valor obtido. No segundo segmento, a professora convida outros alunos a apresentarem as suas resoluções e as suas intervenções são discretas, sobretudo de apoiar/guiar. A professora aproveita a introdução de uma representação em diagrama por parte de um aluno para servir de apoio à discussão que se segue desse momento em diante, procurando, além disso, que se estabeleçam conexões entre as diversas representações. Deste modo, os aspetos de representação adquirem aqui grande proeminência. No terceiro segmento, a professora lança dois desafios aos alunos – compararem as diferentes resoluções e encontrarem o erro na resolução de um aluno. A representação tem também aqui um papel destacado e, na parte final, a professora promove um momento de negociação do significado de "quinta parte" que envolve, sobretudo, interpretação – noção que está presente desde o princípio, mas que nem todos os alunos parecem compreender completamente. Finalmente, no quarto segmento, a professora lança o desafio aos alunos de formularem uma generalização relativa à multiplicação de uma fração por um número natural, o que, sustentado por ações de apoiar/guiar, nomeadamente redizendo as suas contribuições, conduz os alunos à generalização pretendida, primeiro numa forma simples (para frações unitárias) e depois numa forma mais geral (para quaisquer frações). Nestes segmentos importa destacar, sobretudo, dois aspetos: o modo como a professora promove o surgimento de uma situação de desacordo e explora essa situação bem como o desafio que coloca aos alunos ao pedir-lhes uma generalização.

Os segmentos analisados mostram momentos produtivos de trabalho que decorrem da abordagem exploratória seguida nesta aula, em que foi proposta uma tarefa aos alunos que estes não poderiam resolver de uma forma imediata. Na verdade, para resolvê-la, os alunos tinham de recorrer aos seus conhecimentos anteriores relativos à operação de multiplicação de uma fração por um número natural. Para além da tarefa, destaca-se, também a forma de comunicação promovida pela professora, marcada pelo incentivo à participação dos alunos, num registo essencialmente dialógico, colocando-lhes questões, valorizando as suas contribuições, redizendo as suas intervenções para ajudá-los a evoluir na sua linguagem matemática e estabelecendo, quando necessário, situações de negociação de significados. Destaca-se, também, a atenção da professora aos processos matemáticos, com destaque para a representação e o raciocínio, nomeadamente promovendo o estabelecimento de generalizações.

Referências

BISHOP, A.; GOFFREE, F. Classroom organization and dynamics. In: CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; OTTE, M. (Eds.), *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel, 1986. p. 309-365.

BRUNER, J. *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água, 1999.

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Task and activity. In CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; OTTE, M. (Eds.), *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel, 1986, p. 243-307.

CENGIZ, N.; KLINE, K.; GRANT, T. J. Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education,* v. 14, p. 355–374, 2011.

FRANKE, M. L.; KAZEMI, E.; BATTEY, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In Lester, F. (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning.* Greenwich, CT: Information Age, 2007, p. 225-256

LAKATOS, I. *A lógica do descobrimento matemático: Provas e refutações* (Tradução de N. C. Caixeiro). Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LAMPERT, M. When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal,* v. 27, n. 1, p. 29-63, 1990.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, v. 22, n. 2, p. 55-81, 2013.

POTARI, D.; JAWORSKI, B. Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education,* v. 5, p. 351-380, 2002.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning,* v. 10, p. 313-340, 2008.

WOOD, T. Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 30, n. 2, p. 171-191, 1999.

Data de recebimento: 21.04.2015

Data de aceite: 02.06.2015